**Knus, M.-A. / Ojanguren, M.**

*Sur quelques applications de la théorie de la descente à l'étude du groupe de Brauer*

Commentarii Mathematici Helvetici, Vol.47 (1972)

# Sur quelques applications de la théorie de la descente à l'étude du groupe de Brauer

M.-A. Knus et M. Ojanguren

## 1. Introduction

Il est bien connu que le groupe de Brauer $\mathrm{Br}(K)$ d'un corps $K$ est de torsion. On montre en effet que pour toute algèbre centrale simple $A$ de dimension $n^2$ sur $K$, la classe $[A]$ de $A$ est annulée par $n$. Utilisant la cohomologie non-abélienne de Giraud, Grothendieck a généralisé ce résultat au groupe de Brauer d'un schéma (voir [GB] et [G, p. 343]). Dans la première partie de ce travail nous donnons une autre démonstration pour le groupe de Brauer d'un anneau commutatif. Cette démonstration, qui se réduit à un exercice de descente fidèlement plate, donne explicitement un isomorphisme $A\otimes\cdots\otimes A\simeq\mathrm{End}_R(Q)$, $Q$ un $R$-module fidèlement projectif. Même dans le cas d'un corps, elle est différente et peut-être plus simple que les démonstrations classiques.

Dans la deuxième partie, nous généralisons aux anneaux commutatifs les résultats sur la $p$-torsion du groupe de Brauer d'un corps de caractéristique $p\neq 0$.

Finalement nous montrons que le groupe de Brauer d'un anneau s'injecte dans une limite inductive de groupes de cohomologie d'Amitsur. Utilisant alors des résultats d'Amitsur et Rosenberg-Zelinsky, nous prouvons que pour une extension ″radicielle″ d'annaux l'application induite des groupes de Brauer est surjective. Ce résultat est dû à Hochschild [H, p. 144] pour des extensions de corps.

Nous remercions les professeurs A. Frölich et A. Rosenberg de leur aide pendant la préparation de cette note.

## 2. La descente fidèlement plate

Soit $R$ un anneau commutatif et soit $S$ une $R$-algèbre commutative. Nous noterons toujours $\otimes$ le produit tensoriel sur $R$, sauf évidence contraire. Si $M$ et $N$ sont des $R$-modules et si $f:M\to N$ est un homomorphisme de $R$-modules, $M_S$ désignera le $S$-module $M\otimes S$ et $f_S$ le $S$-homomorphisme $f\otimes 1_S: M_S\to N_S$. Pour tout homomorphisme $f:M_1\otimes\cdots\otimes M_k\to N_1\otimes\cdots\otimes N_k$, $f_i$ sera l'homomorphisme $M_1\otimes\cdots\otimes S\otimes\cdots\otimes M_k\to$ $\to N_1\otimes\cdots\otimes S\otimes\cdots\otimes N_k$ obtenu en tensorisant $f$ avec l'identité de $S$ en $i$-ième position.

Pour tout $S$-module $M$, soient $S\otimes M$ et $M\otimes S$ les deux $S\otimes S$-modules obtenus à partir de $M$ par extension des scalaires. Tout $S\otimes S$-homomorphisme $g: M\otimes S\to S\otimes M$

induit

$$g_1: S \otimes M \otimes S \to S \otimes S \otimes M$$
$$g_2: M \otimes S \otimes S \to S \otimes S \otimes M$$
$$g_3: M \otimes S \otimes S \to S \otimes M \otimes S.$$

Si $N$ est le $R$-sous-module de $M$ défini par $N = \{m \in M \mid 1 \otimes m = g(m \otimes 1)\}$, notons $\eta: N \otimes S \to M$ l'homomorphisme de $S$-modules tel que $\eta(n \otimes s) = ns$.

THÉORÈME 2.1. *Si S est une R-algèbre fidèlement plate et si g est une* donnée de descente, *c'est-à-dire tel que* $g_2 = g_1 g_3$, *alors* $\eta$ *est un isomorphisme et le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} N \otimes S \otimes S & \xrightarrow{\eta \otimes 1} & M \otimes S \\ {\scriptstyle \tau}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ S \otimes N \otimes S & \xrightarrow[1 \otimes \eta]{} & S \otimes M \end{array}$$

*où* $\tau(n \otimes s \otimes t) = s \otimes n \otimes t$, *est commutatif. Cette propriété définit la paire* $(N, \eta)$ *à un isomorphisme près. Si, de plus, M est un S-module* fidèlement projectif *(c'est-à-dire projectif, de type fini et fidèle), N l'est sur R.*

*Remarque* 2.2. Si $M$ est une $S$-algèbre et $g$ un isomorphisme de $S \otimes S$-algèbres, alors $N$ est une $R$-algèbre et $\eta$ un isomorphisme de $S$-algèbres.

Une démonstration du théorème 2.1 peut être trouvée dans [SGA1, Exposé VIII] ou dans [GD].

## 3. Les algèbres d'Azumaya

Soit $A$ une $R$-algèbre. Nous appelerons *R-algèbre neutralisante* pour $A$ un triple $(S, P, \sigma)$ où $S$ est une $R$-algèbre commutative fidèlement plate, $P$ un $S$-module fidèlement projectif et $\sigma$ un isomorphisme de $S$-algèbres $\sigma: A \otimes S \to \mathrm{End}_S(P)$. Nous dirons que $(S', P', \sigma')$ est une extension de $(S, P, \sigma)$ si $S'$ est une extension de $S$ et $P' = P \otimes_S S' = P_{S'}$, $\sigma' = \sigma_{S'}$. Rappelons encore qu'une $R$-algèbre $S$ est *étale* si elle est de présentation finie, plate et $S \otimes_R S$-projective pour la structure de $S \otimes S$-algèbre induite par la multiplication $S \otimes S \to S$.

Une *R-algèbre d'Azumaya A* est une $R$-algèbre satisfaisant aux conditions équivalentes suivantes:

1) $A$ est centrale et séparable sur $R$.

2) $A$ est un $R$-module fidèlement projectif et l'application canonique $\varrho: A \otimes A^0 \to \mathrm{End}_R(A)$ ($A^0$ est l'algèbre opposée) est un isomorphisme.

3) $A$ est un $R$-module projectif de type fini et $A/mA$ est une $R/m$-algèbre centrale simple pour tout idéal maximal $m$ de $R$.

4) Tout point $\mathfrak{p}$ de $\operatorname{Spec}(R)$ possède un voisinage ouvert $U_f = \operatorname{Spec}(R_f)$, $f \in R - \mathfrak{p}$, tel que $A_f$ possède une $R_f$-algèbre neutralisante $(S(f), P(f), \sigma(f))$ où $S(f)$ est libre de rang fini et séparable sur $R_f$ et $P(f)$ est un $S(f)$-module libre de rang fini.

5) $A$ possède une $R$-algèbre neutralisante $(S, P, \sigma)$.

6) $A$ possède une $R$-algèbre neutralisante $(S, P, \sigma)$ où $S$ est étale sur $R$.

Les équivalences 1)$\Leftrightarrow$2) et 2)$\Leftrightarrow$3) se trouvent dans [AG], [GB] ou encore dans [DI]. Auslander et Goldman montrent également dans [AG] que toute algèbre centrale et séparable sur un anneau local possède une algèbre neutralisante libre de rang fini et séparable. On montre alors facilement que 1)$\Rightarrow$4). Pour voir que 4)$\Rightarrow$6) on peut prendre un recouvrement fini de $\operatorname{Spec}(R)$ par des ouverts $U_i = \operatorname{Spec}(R_{f_i})$ $i = 1, \ldots, k$, donnés par 4) et poser $S = \prod S(f_i)$, $P = \prod P(f_i)$, $\sigma = \prod \sigma(f_i)$. L'implication 6)$\Rightarrow$5) est triviale. Démontrons finalement que 5)$\Rightarrow$2). Par localisation il est facile de vérifier 2) pour l'algèbre des endomorphismes d'un module fidèlement projectif. Par conséquent, $A_S \otimes_S A_S^0 \to \operatorname{End}_S(A_S)$ est un isomorphisme. Le $R$-module $A$ est projectif de type fini car $A_S$ l'est sur $S$ et $S$ est fidèlement plate. On a alors $\operatorname{End}_S(A_S) \simeq \operatorname{End}_R(A) \otimes S$ et $\varrho: A \otimes A^0 \to \operatorname{End}_R(A)$ est un isomorphisme.

Il suit de la condition 2) que le produit tensoriel $A \otimes B$ de deux $R$-algèbres d'Azumaya $A$ et $B$ est une $R$-algèbre d'Azumaya et que, pour toute $R$-algèbre commutative $S$, $A \otimes S$ est une $S$-algèbre d'Azumaya. On dit que $A$ et $B$ sont *semblables* si les conditions équivalentes [AG, p. 381]

1) $A \otimes B^0 \simeq \operatorname{End}_R(P)$, $P$ fidèlement projectif sur $R$.

2) $A \otimes \operatorname{End}_R(P) \simeq B \otimes \operatorname{End}_R(Q)$, $P$ et $Q$ fidèlement projectifs sur $R$

sont satisfaites. Le groupe de Brauer $\operatorname{Br}(R)$ de $R$ est l'ensemble des classes $[A]$ d'algèbres semblables, muni du produit induit par $\otimes$. L'inverse de $[A]$ est $[A^0]$ et on démontre que $[A] = 1$ si et seulement si $A \simeq \operatorname{End}_R(P)$ pour un $R$-module fidèlement projectif $P$.

Pour toute $R$-algèbre neutralisante $(S, P, \sigma)$ de $A$, soit $\varphi$ l'isomorphisme de $S \otimes S$-algèbres défini par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A \otimes S \otimes S & \xrightarrow{\sigma \otimes 1} & \operatorname{End}_{S \otimes S}(P \otimes S) \\ \tau \downarrow & & \downarrow \varphi \\ S \otimes A \otimes S & \xrightarrow[1 \otimes \sigma]{} & \operatorname{End}_{S \otimes S}(S \otimes P) \end{array} \qquad (*)$$

où $\tau(a \otimes s \otimes t) = s \otimes a \otimes t$.

Nous dirons qu'une $R$-algèbre neutralisante $(S, P, \sigma)$ est *bonne* si $\varphi$ est *intérieur*, c'est-à-dire induit par un isomorphisme de $S \otimes S$-modules $f: P \otimes S \to S \otimes P$: $\varphi(x) = f x / f^{-1}$ pour tout $x \in \operatorname{End}_{S \otimes S}(P \otimes S)$.

Pour démontrer l'existence d'une bonne algèbre neutralisante nous nous servirons du résultat suivant de M. Artin.

THÉORÈME 3.1 (Artin). *Soient $R$ un anneau noethérien, $R \to S$ une $R$-algèbre étale fidèlement plate, $S^{(n)} = S \otimes_R \cdots \otimes_R S$ (n facteurs) et $S^{(n)} \to T$ une $S^{(n)}$-algèbre étale fidèlement plate. Il existe une $S$-algèbre étale fidèlement plate $S \to S'$ telle que l'application canonique $S^{(n)} \to S'^{(n)}$ se factorise à travers $T: S^{(n)} \to T \to S'^{(n)}$.*

*Démonstration.* C'est un cas particulier du théorème 4.1 de [A].

PROPOSITION 3.2. *Toute $R$-algèbre d'Azumaya possède une bonne algèbre neutralisante $(S, P, \sigma)$. Si l'isomorphisme $f: P \otimes S \to S \otimes P$ qui induit $\varphi$ est une donnée de descente, c'est-à-dire si $f_2 = f_1 f_3$, on a $[A] = 1$. Inversément, si $[A] = 1$ et si $(S, P, \sigma)$ est une algèbre neutralisante pour $A$, il existe une bonne algèbre neutralisante pour $A$ $(S', P', \sigma')$, extension de $(S, P, \sigma)$, telle que $\varphi' = \varphi_{S' \otimes S'}$ soit induit par une donnée de descente $g: P' \otimes S' \to S' \otimes P'$.*

*Démonstration.* Supposons d'abord $R$ noethérien. Soit $(S, P, \sigma)$ une algèbre neutralisante étale pour $A$. L'isomorphisme $\varphi$ est induit par un isomorphisme $f: P \otimes S \to$ $\to (S \otimes P) \otimes_{S^{(2)}} I$ de $S^{(2)}$-modules, où $I$ est un $S^{(2)}$-module inversible; de plus $\varphi$ est intérieur si et seulement si $I$ est libre [RZ1, Lemma 9]. Soit $T$ une $S^{(2)}$-algèbre étale fidèlement plate telle que $I \otimes_{S^{(2)}} T \simeq T$. On peut par exemple choisir pour $T$ un produit fini de localisés $\prod_{i=1}^m S_{fi}^{(2)}$ tels que $I_{f_i}$ soit $S_{f_i}^{(2)}$-libre pour tout $i$ et que les éléments $f_1, \ldots, f_m$ de $S^{(2)}$ engendrent $S^{(2)}$. Si $S'$ est la $S^{(2)}$-algèbre du théorème 3.1, $I \otimes_{S^{(2)}} S'^{(2)} \simeq S'^{(2)}$ et $(S', S' \otimes_S P, 1_{S'} \otimes_S \sigma)$ est une bonne algèbre neutralisante. Pour $R$ arbitraire, il suffit d'observer que $A$ est de la forme $A_0 \otimes_{R_0} R$ où $R_0$ est un sous-anneau noethérien (en fait de type fini sur Z) de $R$ et $A_0$ une $R_0$-algèbre d'Azumaya. On construit alors une bonne algèbre neutralisante pour $A_0$ et en tensorisant avec $R$, on obtient la bonne algèbre neutralisante pour $A$.

Supposons que $\varphi$ soit induit par un isomorphisme $f$ tel que $f_2 = f_1 f_3$. D'après le théorème 2.1, il existe un $R$-module fidèlement projectif $Q$ et un isomorphisme de $S$-modules $\eta: Q \otimes S \to P$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Q \otimes S \otimes S & \xrightarrow{\eta \otimes 1} & P \otimes S \\ \tau \downarrow & & \downarrow f \\ S \otimes Q \otimes S & \xrightarrow[1 \otimes \eta]{} & S \otimes P \end{array}$$

commute. Il s'ensuit que le diagramme correspondant

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{End}_R(Q) \otimes S \otimes S & \xrightarrow{\varrho \otimes 1} & \mathrm{End}_{S \otimes S}(P \otimes S) \\ \tau \downarrow & & \downarrow \varphi \\ S \otimes \mathrm{End}(Q) \otimes S & \xrightarrow[1 \otimes \varrho]{} & \mathrm{End}_{S \otimes S}(S \otimes P) \end{array}$$

où $\varrho$ est la conjugaison par $\eta$, commute aussi. L'unicité de la descente appliquée aux paires $(A, \sigma)$ et $(\mathrm{End}_R(Q), \varrho)$ entraîne que $A \simeq \mathrm{End}_R(Q)$.

Soient maintenant $A = \mathrm{End}_R(Q)$, $Q$ fidèlement projectif, et $(S, P, \sigma)$ une algèbre neutralisante pour $A$. Comme dans la première partie de la démonstration, on construit une extension fidèlement plate $S'$ de $S$ telle que $\sigma' = \sigma \otimes_S 1_{S'}: \mathrm{End}_R(Q) \otimes S' \to \to \mathrm{End}_{S'}(P \otimes_S S')$ soit induit par un $S'$-isomorphisme $h: Q \otimes S' \to P' = P \otimes_S S'$. Définissons $f$ par la condition que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Q \otimes S' \otimes S' & \xrightarrow{h \otimes 1} & P' \otimes S' \\ \tau \downarrow & & \downarrow f \\ S' \otimes Q \otimes S' & \xrightarrow[1 \otimes h]{} & S' \otimes P' \end{array}$$

commute. On a évidemment $f_2 = f_1 f_3$ et $f$ induit $\varphi'$.

*Remarque* 3.3. Si $\varphi$ est induit par une donnée de descente $f$ et qu'on pose $Q = \{x \in P \mid 1 \otimes x = f(x \otimes 1)\}$, alors l'isomorphisme $A \to \mathrm{End}_R(Q)$ est la restriction à $A$ de l'isomorphisme $\sigma: A \otimes S \to \mathrm{End}_S(P)$.

*Remarque* 3.4. Si $A$ est une algèbre centrale simple de dimension finie sur un corps $K$, $\varphi$ est intérieur pour toute extension finie $S$ de $K$ qui neutralise $A$, par exemple pour un sous-anneau commutatif maximal de $A$. En effet $S \otimes S$ est semi-local.

## 4. La torsion du groupe de Brauer

THÉORÈME 4.1. *Pour toute R-algèbre d'Azumaya de rang constant $n^2$, on a* $[A]^n = 1$.

*Démonstration.* Puisque $A$ est de rang constant $n^2$, il existe une bonne algèbre neutralisante $(S, P, \sigma)$ telle que $P = S^n$, et donc que $\varphi$ dans le diagramme (*) soit induit par un automorphisme $f: (S \otimes S)^n \to (S \otimes S)^n$. On a évidemment $\varphi_2 = \varphi_1 \varphi_3$. D'autre part $\varphi_i$ est induit par $f_i$, $i = 1, 2, 3$. L'automorphisme $f_2^{-1} f_1 f_3$ appartient donc au centre de $M_n(S \otimes S \otimes S)$ et on peut écrire $u f_2 = f_1 f_3$ où $u$ est une unité de $S \otimes S \otimes S$. Notons $A^{(n)} = A \otimes \cdots \otimes A$ et $f^{(n)} = f \otimes \cdots \otimes f$ ($n$ facteurs). Soit $\det(f)$ le déterminant de $f$ et soit $h = f^{(n)} (\det f)^{-1}: p^{(n)} \otimes S \to S \otimes P^{(n)}$. Le déterminant commute avec l'extension des scalaires, par conséquent $h_i = f_i^{(n)} (\det f_i)^{-1}$. Puisque $(u f_2)^{(n)} = u^n f_2^{(n)}$ et $\det(u f_2) = u^n \det(f_2)$, on a $h_2 = h_1 h_3$, d'où le résultat d'après la proposition 3.2, car $h$ induit aussi $\varphi^{(n)}$.

COROLLAIRE 4.2. *Pour tout anneau commutatif R,* $\mathrm{Br}(R)$ *est un groupe de torsion.*

*Démonstration.* Soit $[A] \in \mathrm{Br}(R)$. Il suffit de décomposer $R$ en un produit $\prod_{i=1}^k R_i$ fini tel que $A \otimes R_i$ soit de rang constant sur $R_i$. Ceci est possible car $A$ est un $R$-module projectif de type fini.

*Remarque* 4.3. Si l'on tient compte de la remarque 3.3, la démonstration du théorème 4.1 donne explicitement un isomorphisme $A \otimes \cdots \otimes A \to \mathrm{End}_R(Q)$.

*Remarque* 4.4. Si on veut éviter l'emploi du théorème d'Artin et donner ainsi une démonstration tout à fait élémentaire de ce résultat, il suffit d'observer que, même si $\varphi$ n'est pas intérieur, il existe toujours un monomorphisme $f:(S\otimes S)^n \to (S\otimes S)^n$ tel que $\varphi(\alpha)f = f\alpha$ pour tout $\alpha \in M_n(S\otimes S)$ et que $\det(f)$ ne divise pas zéro dans $S\otimes S$. On vérifie alors aisément par localisation que $h = f^{(n)}(\det f)^{-1}$ induit un isomorphisme $P^{(n)}\otimes S \to S\otimes P^{(n)}$ et satisfait à la condition de descente.

## 5. Sur la $p$-torsion

THÉORÈME 5.1. *Soit $p$ un nombre premier, $m$ un entier positif, $R$ un anneau commutatif de caractéristique $p$ et $K$ une $R$-algèbre fidèlement plate, telle que $K^{p^m} \subset R$. Si $[A\otimes K] = 1$ dans* $\mathrm{Br}(K)$, *alors $[A]^{p^m} = 1$ dans* $\mathrm{Br}(R)$.

*Démonstration.* Si $[A\otimes K] = 1$ il existe une algèbre neutralisante de la forme $(K, P, \sigma)$. Elle est nécessairement bonne: en effet, l'isomorphisme $\varphi$ défini par le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A\otimes K\otimes K & \xrightarrow{\sigma\otimes 1} & \mathrm{End}_{K\otimes K}(P\otimes K) \\ \tau\downarrow & & \downarrow\varphi \\ K\otimes A\otimes K & \xrightarrow[1\otimes\sigma]{} & \mathrm{End}_{K\otimes K}(K\otimes P) \end{array}$$

est induit par $f: P\otimes K \simeq (K\otimes P)\otimes_{K^{(2)}} I$ [RZ1, Lemma 9], $I$ un $K^{(2)}$-module inversible. On voit, en tensorisant le diagramme par la $K^{(2)}$-algèbre $\mu: K^{(2)} \to K$, $\mu(a\otimes b) = ab$, que $\varphi\otimes_{K^{(2)}} 1_K$ est l'identité. Comme le noyau de $\mu$ est nilpotent, $\mu$ induit un monomorphisme $\mathrm{Pic}(K^{(2)}) \to \mathrm{Pic}(K)$. Par conséquent $I \simeq K^{(2)}$ et $\varphi$ est induit par un isomorphisme $P\otimes K \to K\otimes P$ que nous noterons encore $f$. En tensorisant $p^m$ fois sur $K^{(2)}$ le diagramme ci-dessus, on obtient un diagramme

$$\begin{array}{ccc} A^{(p^m)}\otimes K\otimes K & \xrightarrow{\sigma^{(p^m)}\otimes 1} & \mathrm{End}_{K\otimes K}(P^{(p^m)}\otimes K) \\ \tau\downarrow & & \downarrow\varphi^{(p)} \\ K\otimes A^{(p^m)}\otimes K & \xrightarrow[1\otimes\sigma^{(p^m)}]{} & \mathrm{End}_{K\otimes K}(K\otimes P^{(p^m)}) \end{array}$$

où $\varphi^{(p^m)}$ est induit par $f^{(p^m)}$. Comme $f_1 f_2^{-1} f_3 = u \in (K^{(3)})^*$, $f_1^{(p^m)}(f_2^{(p^m)})^{-1} f_3^{(p^m)} = u^{p^m} \in R^*$. Mais $\varphi^{(p^m)}$ est aussi induit par $g = u^{-p^m} f^{(p^m)}$ et $g_1 g_2^{-1} g_3 = 1$. Il suit alors de la proposition 3.2 que $A^{(p^m)}$ est une $R$-algèbre triviale.

Supposons maintenant que $R$ soit un anneau intègre de corps de fractions $\Omega$. Soit $R^{1/p^m}$ le sous-anneau de $\Omega^{1/p^m}$ formé des racines $p^m$-ièmes des éléments de $R$.

LEMME 5.2. *Pour toute $R$-algèbre étale $S$, l'application $\pi: S\otimes R^{1/p^m} \to S$ définie par $\pi(a\otimes b) = a^{p^m} b^{p^m}$ est un isomorphisme d'anneaux.*

*Démonstration.* Si $T$ est l'image de $\pi$ on a $S^{p^m} \subset T \subset S$. On sait d'autre part que $S$ est séparable sur $T$ car $S$ est séparable sur $R$ et $T \supset R$. $S$ est donc un $S\otimes_T S$-module projectif et l'égalité $T=S$ suit du corollaire 21.1.6 de [EGA]. Pour démontrer l'injectivité, il suffit de démontrer que $S\otimes R^{1/p^m}$ ne contient pas d'éléments $p$-nilpotents. Mais $S\otimes R^{1/p^m}$ est une $R^{1/p^m}$-algèbre étale et on sait qu'une algèbre étale sur un anneau réduit est aussi un anneau réduit. [R, VII, 2, Prop. 1].

LEMME 5.3. *Soit $S$ une $R$-algèbre étale et soient $f$ et $g: M \to N$ deux isomorphismes de $S\otimes R^{1/p^m}$-modules projectifs de type fini, tels que $f^{(p^m)}=g^{(p^m)}$. Alors $f=g$.*

*Démonstration.* Par localisation, on peut supposer que $M$ et $N$ sont libres de type fini. Un calcul explicite montre alors que $f=e\cdot g$ où $e\in S\otimes R^{1/p^m}$ est tel que $\pi(e)=1$. Il faut que $e=1$ d'après le lemme 5.2.

THÉORÈME 5.4. *Si $[A]^{p^m}=1$, alors $[A\otimes R^{1/p^m}]=1$.*

*Démonstration.* Soit $(S, P, \sigma)$ une bonne algèbre neutralisante pour $A$, telle que $S$ soit étale sur $R$. L'isomorphisme dans le diagramme $(*)$ est donc induit par un isomorphisme $f: P\otimes S \to S\otimes P$. Quitte à remplacer $S$ par une extension $S'$, on peut supposer, d'après la proposition 3.2, que $\varphi^{(p^m)}$ est induit par un isomorphisme de descente $g: P^{(p^m)}\otimes S \to S\otimes P^{(p^m)}$, car $[A]^{p^m}=1$. On peut écrire $g=uf^{(p^m)}$ où $u$ est une unité de $S\otimes S$. D'après le lemme 5.2 appliqué à $S\otimes S$ il existe $v\in S\otimes S\otimes R^{1/p^m}$ tel que $v^{p^m}=u$. L'isomorphisme $h=vf: P\otimes S\otimes R^{1/p^m} \to S\otimes P\otimes R^{1/p^m}$ induit $\varphi_{R^{1/pm}}$ et $h^{(p^m)}=g$ est une donnée de descente. Il suit du lemme 5.3, appliqué à $h_2$ et $h_1h_3$, que $h$ est aussi une donnée de descente.

COROLLAIRE 5.5. *Le groupe de Brauer d'un anneau intègre parfait de caractéristique $p$ est sans $p$-torsion.*

COROLLAIRE 5.6. *Si $[A]^{p^m}=1$, $A$ possède une algèbre neutralisante libre et finie sur $R$.*

*Démonstration.* Si $A\otimes R^{1/p^m}$ est une $R^{1/p^m}$-algèbre triviale, il existe une sous-$R$-algèbre de type fini $S=R[a_1,\ldots, a_n]\subset R^{1/p^m}$ telle que la $S$-algèbre $A\otimes S$ soit triviale. Soient $t_1,\ldots, t_n$ des indéterminées et $S'$ la $R$-algèbre libre $R[t_1,\ldots, t_n]/I$ où $I$ est l'idéal engendré par les éléments $t_i^{p^m}-a_i^{p^m}$. Puisque le noyau de l'homomorphisme $S'\to S$ défini par $t_i\mapsto a_i$ est nilpotent, l'application correspondante $\mathrm{Br}(S')\to \mathrm{Br}(S)$ est injective [RS] et $A\otimes S'$ est une $S'$-algèbre triviale.

## 6. La cohomologie d'Amitsur

Pour toute $R$-algèbre commutative $S$, soit $S^*$ le groupe des unités de $S$. Rappelons que le complexe multiplicatif d'Amitsur $C(S/R)$ est la suite de groupes

$$1 \to S^* \xrightarrow{\Delta_1} (S\otimes S)^* \xrightarrow{\Delta_2} (S\otimes S\otimes S)^* \xrightarrow{\Delta_3} \ldots$$

où $\Delta_n(x)=\prod x_i^{(-1)^{i+1}}$ et $x_i$ s'obtient à partir de $x$ en introduisant 1 en $i$-ième position. On vérifie immédiatement que $\Delta_{n+1}\Delta_n=0$. La cohomologie d'Amitsur est alors définie par $\mathrm{H}^n(S/R)=\ker\Delta_{n+1}/\mathrm{Im}\,\Delta_n$. Posons $\mathrm{H}^n(R)=\lim \mathrm{H}^n(S/R)$, la limite étant prise sur les $R$-algèbres fidèlement plates $S$. Une construction précise de telles limites inductives se trouve dans [CR, p. 68] ou dans [D].

A toute $R$-algèbre d'Azumaya $A$, on peut associer un 2-cocycle. En effet, soit $(S, P, \sigma)$ une bonne algèbre neutralisante pour $A$. L'isomorphisme $\varphi: \mathrm{End}_{S\otimes S}(P\otimes S)\to \mathrm{End}_{S\otimes S}(S\otimes P)$ construit à l'aide de $\sigma: A\otimes S\to \mathrm{End}_S(P)$ est donc induit par un $S\otimes S$-isomorphisme $f: P\otimes S\to S\otimes P$. Puisque $\varphi_2=\varphi_1\varphi_3$, l'élément $u(\sigma, f)=f_2^{-1}f_1 f_3$ appartient au centre de $\mathrm{End}_{S\otimes S\otimes S}(P\otimes S\otimes S)$, donc à $(S\otimes S\otimes S)^*$. A l'aide des relations $(f_i)_j=(f_{j-1})_i$ pour $i<j$ et $(f_i)_i=(f_i)_{i+1}$, on vérifie que $\Delta_3(u(\sigma, f))=1$, c'est-à-dire que $u(\sigma, f)$ est un 2-cocycle de $C(S/R)$. La classe de $u(\sigma, f)$ dans $\mathrm{H}^2(S/R)$ ne dépend pas du choix de l'isomorphisme $f$ qui induit $\varphi$, car si $g$ est un deuxième isomorphisme induisant $\varphi$ on a $g=vf$ pour un $v\in(S\otimes S)^*$ et par conséquent $u(\sigma, g)=u(\sigma, f)\,\Delta_2(v)$. Notons $\theta(\sigma)$ l'image de $u(\sigma, f)$ dans $\mathrm{H}^2(R)$.

LEMME 6.1. *Si* $[A]=1$, *alors* $\theta(\sigma)=1$.

*Démonstration.* Il est clair que si $S'$ est une extension de $S$ et $\sigma'=\sigma\otimes_S 1_{S'}$, on a $\theta(\sigma)=\theta(\sigma')$. Si $[A]=1$, d'après la proposition 3.2 il existe une extension $S'$ de $S$ telle que $\varphi'=\varphi\otimes_S 1_{S'}$ est induit par une donnée de descente $g$. En ce cas, on a $u(\sigma', g)=1$ et partant $\theta(\sigma)=\theta(\sigma')=1$.

LEMME 6.2. *Soient* $(S, P, \sigma)$ *une bonne algèbre neutralisante pour* $A$ *et* $\tilde{P}=\mathrm{Hom}_S(P, S)$ *le dual de* $P$. *Notons par* $\tilde{\alpha}$ *le dual de tout homomorphisme* $\alpha$ *de modules. Soit* $\sigma^0: A^0\otimes S\to \mathrm{End}_S(\tilde{P})$ *l'isomorphisme défini par* $\sigma^0(x)=\widetilde{\sigma(x)}$. *Alors* $(S, \tilde{P}, \sigma^0)$ *est une bonne algèbre neutralisante pour* $A^0$ *et* $\theta(\sigma^0)=\theta(\sigma)^{-1}$.

*Démonstration.* On vérifie facilement que si l'isomorphisme $\varphi: \mathrm{End}_{S\otimes S}(P\otimes S)\to \mathrm{End}_{S\otimes S}(S\otimes P)$, défini par $\sigma$ est induit par $f: P\otimes S\to S\otimes P$, l'isomorphisme $\varphi^0: \mathrm{End}_{S\otimes S}(\tilde{P}\otimes S)\to \mathrm{End}_{S\otimes S}(S\otimes \tilde{P})$ défini par $\sigma^0$ est induit par $\tilde{f}^{-1}: \tilde{P}\otimes S\to S\otimes \tilde{P}$. On trouve $u(\sigma^0, \tilde{f}^{-1})=u(\sigma, f)^{-1}$, d'où le résultat énoncé.

LEMME 6.3. *Soient* $(S, P, \sigma)$ *et* $(T, Q, \tau)$ *des bonnes algèbres neutralisantes pour* $A$ *et* $B$ *respectivement. Alors* $(S\otimes T, P\otimes Q, \sigma\otimes\tau)$ *est une bonne algèbre neutralisante pour* $A\otimes B$ *et* $\theta(\sigma\otimes\tau)=\theta(\sigma)\,\theta(\tau)$.

*Démonstration.* Si l'isomorphisme $\mathrm{End}_{S\otimes S}(P\otimes S)\to \mathrm{End}_{S\otimes S}(S\otimes P)$ défini par $\sigma$ est induit par $f$ et l'isomorphisme $\mathrm{End}_{T\otimes T}(Q\otimes T)\to \mathrm{End}_{T\otimes T}(T\otimes Q)$ défini par $\tau$ est induit par $g$, l'isomorphisme défini par $\sigma\otimes\tau$ est induit par $f\otimes g$ et $u(\sigma\otimes\tau, f\otimes g)=u(\sigma, f)\otimes u(\tau, g)=u(\sigma\otimes 1_T, f\otimes 1_T)\,u(1_S\otimes\tau, 1_S\otimes g)$. Il en suit que $\theta(\sigma\otimes\tau)=\theta(\sigma\otimes 1_T)\theta(1_S\otimes\tau)=\theta(\sigma)\,\theta(\tau)$.

COROLLAIRE 6.4. *Pour toute algèbre $A$, $\theta(\sigma)$ est indépendant du choix de la bonne algèbre neutralisante.*

*Démonstration.* Soient $(S, P, \sigma)$ et $(T, Q, \tau)$ deux bonnes algèbres neutralisantes pour $A$. D'après les lemmes 6.3 et 6.2, $\theta(\sigma\otimes\tau^0)=\theta(\sigma)\,\theta(\tau)^{-1}$ et d'après le lemme 6.1, en tenant compte de $[A\otimes A^0]=1$, $\theta(\sigma\otimes\tau^0)=1$, d'où le résultat.

THÉORÈME 6.5. *La correspondance $A\mapsto\theta(\sigma)$ induit un monomorphisme naturel* $\theta:\mathrm{Br}(R)\to \mathrm{H}^2(R)$.

*Démonstration.* Le lemme 6.3, le corollaire 6.4 et le lemme 6.1 montrent que l'application $\theta$ est bien définie et qu'elle est un homomorphisme de groupes. Il reste à démontrer qu'elle est injective. Si $\theta(\sigma)=1$, il existe une extension fidèlement plate $S'$ de $S$ telle que $u(\sigma_{S'}, f_{S'})=\Delta_2(v)$ pour une unité $v$ de $S'\otimes S'$. On vérifie immédiatement que $f_{S'}\,v^{-1}$ satisfait à la condition de descente et il suit alors de la proposition 3.2 que $[A]=1$.

## 7. Extensions radicielles

Dans tout ce paragraphe, $R$ dénotera un anneau commutatif de caractéristique $p$, $p$ étant un nombre premier.

Le lemme qui suit est implicite dans la démonstration du théorème 2.1 de [RS].

LEMME 7.1. *Soit $A$ une $K$-algèbre d'Azumaya, $\mu:S'\to S$ un homomorphisme surjectif de $K$-algèbres à noyau nilpotent et $(S, P, \sigma)$ une algèbre neutralisante pour $A$. Alors, si $S'$ est fidèlement plate sur $K$, il existe une algèbre neutralisante $(S', P', \sigma')$ qui* relève $(S, P, \sigma)$, *c'est-à-dire telle que $P=P'\otimes_{S'}S$ et $\sigma=\sigma'\otimes_{S'}1_S$. Si, de plus, $(S, P, \sigma)$ est bonne, $(S', P', \sigma')$ l'est aussi.*

*Démonstration.* Posons, pour simplifier, $B=A\otimes_K S$ et $B'=A\otimes_K S'$. L'isomorphisme $\sigma$ définit une structure de $B$-module sur $P$ et d'après la dualité de Morita [B, II 3.5], $P$ est même un $B$-module fidèlement projectif. Or, le noyau de $\mu$ étant nilpotent et $B'$ finie sur $S'$, le noyau de $1_A\otimes\mu:B'\to B$ est aussi nilpotent. Il existe donc [B, II 2.12] un $B'$-module fidèlement projectif $P'$ tel que $P=B\otimes_{B'}P'=P\otimes_S S'$. Si $\sigma':B'\to\mathrm{End}_{S'}(P')$ est l'homomorphisme de $S'$-algèbres défini par la structure de $B'$-module sur $P'$, $\sigma'$ relève $\sigma$ et est par conséquent un isomorphisme [B, II 2.12]. Puisque $B'$ est fidèlement projectif sur $S'$, $P'$ est un $S'$-module fidèlement projectif et $(S', P', \sigma')$ est une algèbre neutralisante.

On vérifie comme dans la démonstration du théorème 5.1 que $(S', P', \sigma')$ est bonne si $(S, P, \sigma)$ est bonne.

THÉORÈME 7.2. *Pour toute extension $R\subset K$ telle que $\mathrm{K}^{p^m}\subset R$ et que $K$ soit projectif de type fini comme $R$-module, l'homomorphisme* $\mathrm{Br}(R)\to\mathrm{Br}(K)$ *est surjectif.*

*Démonstration.* Soit $A$ une $K$-algèbre d'Azumaya et soit $(S, \sigma, P)$ une bonne $K$-algèbre neutralisante pour $A$. Notons $S'$ la $K$-algèbre $K \otimes_R S$ où $K$ opère sur le premier facteur et soit $\mu: S' \to S$ l'homomorphisme de $K$-algèbres défini par la multiplication dans $S$. Le noyau de $\mu$ est nilpotent car le noyau de la multiplication $K \otimes K \to K$ est nilpotent et est de type fini en tant que $1 \otimes K$-module. D'après le lemme 7.1, il existe une bonne algèbre neutralisante $(S', P', \sigma')$ qui relève $(S, P, \sigma)$. Soit $f: P' \otimes_K S' \to S' \otimes_K P'$ un isomorphisme qui induit le $\varphi$ défini par $\sigma'$ et $u = f_2^{-1} f_1 f_3$ le cocycle associé. D'après Rosenberg et Zelinski [RZ2, Prop. 4.1 et Lemma 4.2] on a une suite exacte

$$\mathrm{H}^2(S\ R) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{H}^2(S'/K) \to \mathrm{H}^3(K/R)$$

où $\alpha$ est induit par $S \to S' = K \otimes S$, $s \to 1 \otimes s$. D'après Amitsur [AM, Lemma 8], $\mathrm{H}^3(K/R) = 0$ et $\alpha$ est donc surjectif). On peut alors écrire $u = (1 \otimes u_0)\,\Delta_2(v)$ où $v \in (S' \otimes_K S')^*$ et où $u_0$ est un 2-cocycle de $S/R$. A l'application $g = fv^{-1}: P' \otimes_K S' \to S' \otimes \otimes_K P'$ est associé le 2-cocycle $g_2^{-1} g_1 g_3 = 1 \otimes u_0 \in (K \otimes_R S \otimes_R S \otimes_R S)^* = (S' \otimes_K S' \otimes_K S')^*$. Notons $Q$ le module $P'$ considéré comme $S$-module seulement et $h: Q \otimes_R S \to S \otimes_R Q$ le $S \otimes_R S$-isomorphisme donné par $g$ (on oublie l'action de $K$!). Le $S$-module $Q$ est fidèlement projectif car $K$ est fidèlement projectif sur $R$. Si $\psi$ est la conjugaison par $h$, on a $\psi_2^{-1} \psi_1 \psi_3 = 1$ car $h_2^{-1} h_1 h_3 = u_0$ est un élément du centre de $\mathrm{End}_{S \otimes S \otimes S}(Q \otimes S \otimes S)$. C'est donc une donnée de descente qui définit une R-algèbre d'Azumaya $A_0 = = \{x \in \mathrm{End}_S(Q) \mid \psi(x \otimes 1) = 1 \otimes x\}$. Puisqu'à $K \otimes A_0$ est associé le 2-cocycle $1 \otimes u_0$, on a $[K \otimes A_0] = [A]$ d'après le théorème 6.5. D'où le résultat.

1) Le lemme d'Amitsur ne concerne que le cas m = 1, mais il n'est pas difficile de s'y ramener.

## BIBLIOGRAPHIE


[A] Artin, M., *On the Joins of Hensel Rings*, Advances in Math. *7* (1971), 282–296.

[AG] Auslander, M. et Goldman, O., *The Brauer group of a commutative ring*, Trans. Amer. Math. Soc. *97* (1960), 367–409.

[AM] Amitsur, S. A., *Complexes of rings*, Israel J. Math. *2* (1964), 143–154.

[B] Bass, H., *Algebraic K-theory* (Benjamin, 1968).

[CR] Chase, S. et Rosenberg, A., *Amitsur cohomology and the Brauer group*, Memoirs of the Amer. Math. Soc. *52* (1965), 34–79.

[D] Dobbs, D. E., *Cech cohomological dimensions for commutative rings*, Springer Lecture Notes 147, 1970.

[DI] De Meyer, F. et Ingraham, E., *Separable algebras over commutative rings*, Springer Lecture Notes 181, 1971.

[EGA] Grothendieck, A., *Eléments de Géométrie Algébrique, IV*, Chap. 0, IHES Publ. Math. No 20.

[G] Giraud, J., *Cohomologie non-abélienne*, Grundlehren *179*, (Springer, 1971).

[GB] Grothendieck, A., *Le groupe de Brauer I*, Séminaire Bourbaki, Exposé 290 (1965).

[GD] ——, *Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique I*, Séminaire Bourbaki, Exposé 190 (1959–1960).

[H] Hochschild, G., *Restricted Lie algebras and simple associative algebras of characteristic p*, Trans. Amer. Math. Soc. *79* (1955), 135–147.

[R] Raynaud, M., *Anneaux Locaux Henséliens* (Springer Lecture Notes 169, Berlin 1970).

[RS] Roy, A. et Sridharan, R., *Derivations in Azumaya algebras*, J. Math. Kyoto Univ. *7* (1967), 161–167.

[RZ1] Rosenberg, A. et Zelinsky, D., *Automorphisms of separable algebras*, Pac. J. of Math. *2* (1961), 1107–1117.

[RZ2] ——, *Amitsur's complex for inseparable fields*, Osaka Math. J. *14* (1962), 219–240.

[SGA 1] *Séminaire de géométrie algébrique 1* (1960/61), dirigé par A. Grothendieck, Springer Lecture Notes 224, 1971.

*M.A.K.*
*ETH*
*Zürich*

*M.O.*
*Institut Battelle*
*Genève*

Reçu le 21 avril/21 novembre 1972